seance4_projection_population_correction

February 19, 2021

1 Evoluation d'une population (correction)

Evolution d'une population à partir des tables de mortalités et d'une situation initiale.

[1]:
```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
```

[2]:
```
from jyquickhelper import add_notebook_menu
add_notebook_menu()
```

[2]:
```
<IPython.core.display.HTML object>
```

1.0.1 Exercice 1 : pyramides des âges

[3]:
```
from actuariat_python.data import population_france_year
population = population_france_year()
df = population
df.head(n=3)
```

[3]:

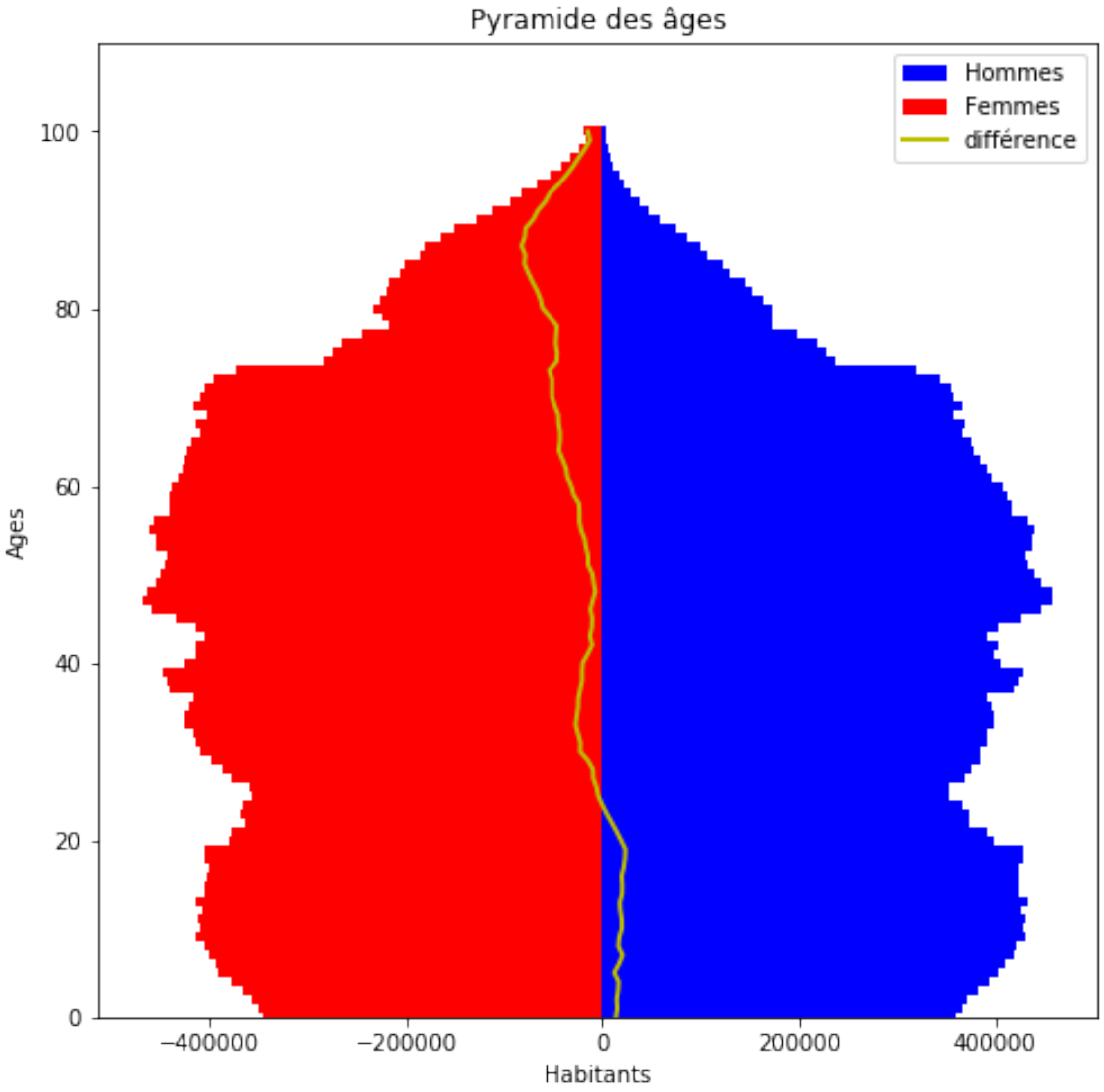
	naissance	age	hommes	femmes	ensemble
0	2019	0	360058	346324	706382
1	2018	1	365656	350503	716159
2	2017	2	371835	357304	729139

[4]:
```
hommes = df["hommes"]
femmes = df["femmes"]
somme = hommes - femmes
```

Je reprends ici le code exposé à Damien Vergnaud's Homepage en l'adaptant un peu avec les fonctions de matplotlib via l'interface pyplot. Puis j'ajoute la différence par âge. On commence souvent par la gallerie pour voir si un graphe ou juste une partie est similaire à ce qu'on veut obtenir.

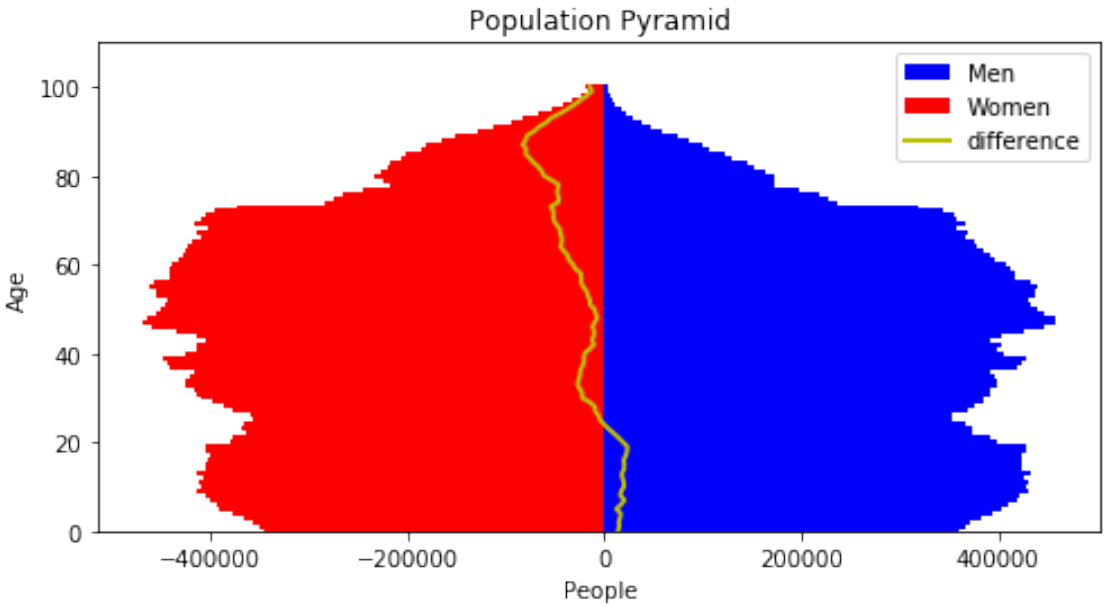
[5]:
```
from matplotlib import pyplot as plt
from numpy import arange
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,8))
ValH = ax.barh(arange(len(hommes)), hommes, 1.0, label="Hommes",
               color='b', linewidth=0, align='center')
ValF = ax.barh(arange(len(femmes)), -femmes, 1.0, label="Femmes",
               color='r', linewidth=0, align='center')
diff, = ax.plot(somme, arange(len(femmes)), 'y', linewidth=2)
ax.set_title("Pyramide des âges")
ax.set_ylabel("Ages")
```

```
ax.set_xlabel("Habitants")
ax.set_ylim([0, 110])
ax.legend((ValH[0], ValF[0], diff), ('Hommes', 'Femmes', 'différence'));
```



Le même en utilisant la fonction insérée dans le module actuariat_python.

[6]:
```
from actuariat_python.plots import plot_population_pyramid
plot_population_pyramid(df["hommes"], df["femmes"], figsize=(8, 4));
```



1.0.2 Exercice 2 : calcul de l'espérance de vie

Le premier objectif est de calculer l'espérance de vie à l'âge t à partir de la table de mortalité. On récupère cette table.

[7]:
```
from actuariat_python.data import table_mortalite_france_00_02
df=table_mortalite_france_00_02()
import pandas
pandas.concat([df.head(n=3), df.tail(n=3)])
```

[7]:

	Age	Homme	Femme
0	0	100000.0	100000.0
1	1	99511.0	99616.0
2	2	99473.0	99583.0
115	117	0.0	0.0
116	118	0.0	0.0
117	120	0.0	0.0

On note P_t la population l'âge t. La probabilité de mourir à la date $t+d$ lorsqu'on a l'âge t correspond à la probabilité de rester en vie à jusqu'à l'âge $t+d$ puis de mourir dans l'année qui suit :

$$m_{t+d} = \frac{P_{t+d}}{P_t} \frac{P_{t+d} - P_{t+d+1}}{P_{t+d}}$$

.

L'espérance de vie s'exprime :

$$\mathbb{E}(t) = \sum_{d=1}^{\infty} d m_{t+d} = \sum_{d=1}^{\infty} d \frac{P_{t+d}}{P_t} \frac{P_{t+d} - P_{t+d+1}}{P_{t+d}} = \sum_{d=1}^{\infty} d \frac{P_{t+d} - P_{t+d+1}}{P_t}$$

On crée une matrice allant de 0 à 120 ans et on pose $\mathbb{E}(120) = 0$. On utilise le module numpy.

[8]:
```
import numpy
hf = df[["Homme", "Femme"]].values
```

```
hf = numpy.vstack([hf, numpy.zeros((8, 2))])
hf.shape
```

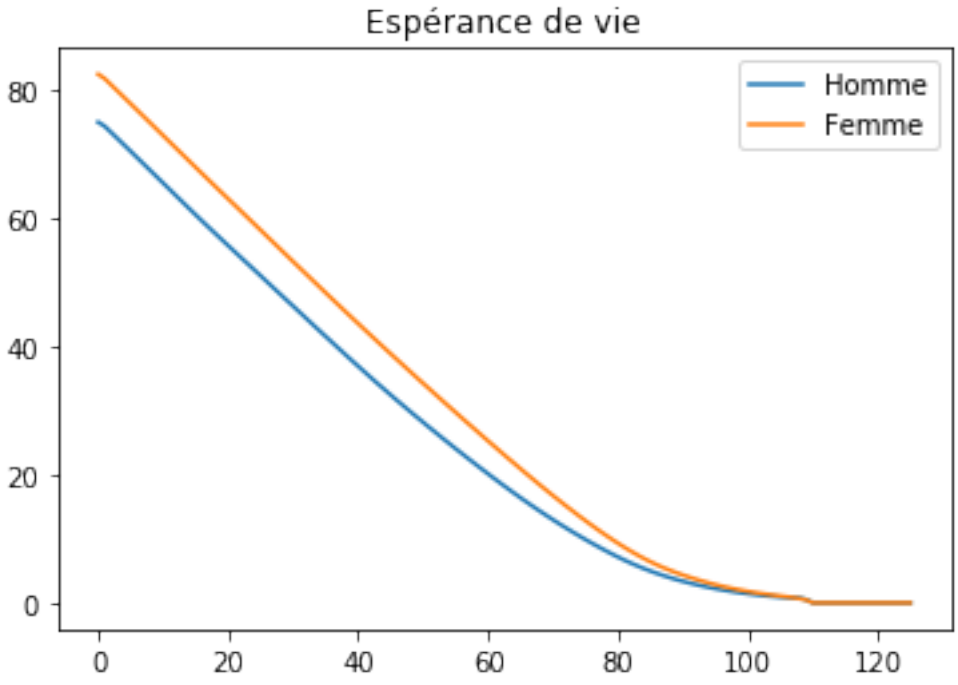
[8]:
```
(126, 2)
```

[9]:
```
nb = hf.shape[0]
esp = numpy.zeros ((nb,2))
for t in range(0,nb):
    for i in (0,1):
        if hf[t,i] == 0:
            esp[t,i] = 0
        else:
            somme  = 0.0
            for d in range(1,nb-t):
                if hf[t+d,i] > 0:
                    somme += d * (hf[t+d,i] - hf[t+d+1,i]) / hf[t,i]
            esp[t,i] = somme
esp[:1]
```

[9]:
```
array([[75.00752, 82.48832]])
```

Enfin, on dessine le résultat avec matplotlib :

[10]:
```
h = plt.plot(esp)
plt.legend(h, ["Homme", "Femme"])
plt.title("Espérance de vie");
```



Le calcul implémenté ci-dessus n'est pas le plus efficace. On fait deux boucles imbriquées dont le coût global est en $O(n^2)$ mais surtout on effectue les mêmes calculs plusieurs fois. Pour le réduire à un coût linéaire $O(n)$, il faut s'intéresser à la quantité :

$$P_{t+1}\mathbb{E}(t+1) - P_t\mathbb{E}(t) = \sum_{d=1}^{\infty} d(P_{t+d+1} - P_{t+d+2}) - \sum_{d=1}^{\infty} d(P_{t+d} - P_{t+d+1})$$

L'implémentation devra utiliser la fonction numpy.cumsum et cette astuce Pandas Dataframe cumsum by row in reverse column order?.

[11]:
```
# à suivre
```

numpy et pandas ont plusieurs fonction en commun dès qu'il s'agit de parcourir les données. Il existe aussi la fonction DataFrame.cumsum.

1.0.3 Exercice 3 : simulation de la pyramide l'année suivante

L'objectif est d'estimer la population française à l'année T. Si $P(a,T)$ désigne le nombre de personnes d'âge a en T, on peut estimer $P(a,T+1)$ en utilisant la probabilité de mourir $m(a)$:

$$P(a+1,T+1) = P(a,T) * (1 - m(a))$$

On commence par calculer les coefficients $m(a)$ avec la table `hf` obtenue lors de l'exercice précédent tout en gardant la même dimension (on aura besoin de la fonction nan_to_num :

[12]:
```
mortalite = (hf[:-1] - hf[1:]) / hf[:-1]
mortalite = numpy.nan_to_num(mortalite)  # les divisions nulles deviennent nan, on les␣
↪remplace par 0
mortalite = numpy.vstack([mortalite, numpy.zeros((1, 2))])
m = mortalite
```

```
c:\python372_x64\lib\site-packages\ipykernel_launcher.py:1: RuntimeWarning:
invalid value encountered in true_divide
  """Entry point for launching an IPython kernel.
```

La population a été obtenue lors de l'exercice 1, on la convertit en un objet numpy :

[13]:
```
pop = population[["hommes","femmes"]].values
pop = numpy.vstack( [pop, numpy.zeros((m.shape[0] - pop.shape[0], 2))])
pop0 = pop.copy()
pop.shape
```

[13]:
```
(126, 2)
```

Ensuite on calcule la population en 2020 :

[14]:
```
pop_next = pop * (1-m)
pop_next = numpy.vstack([numpy.zeros((1, 2)), pop_next[:-1]])
pop_next[:5]
```

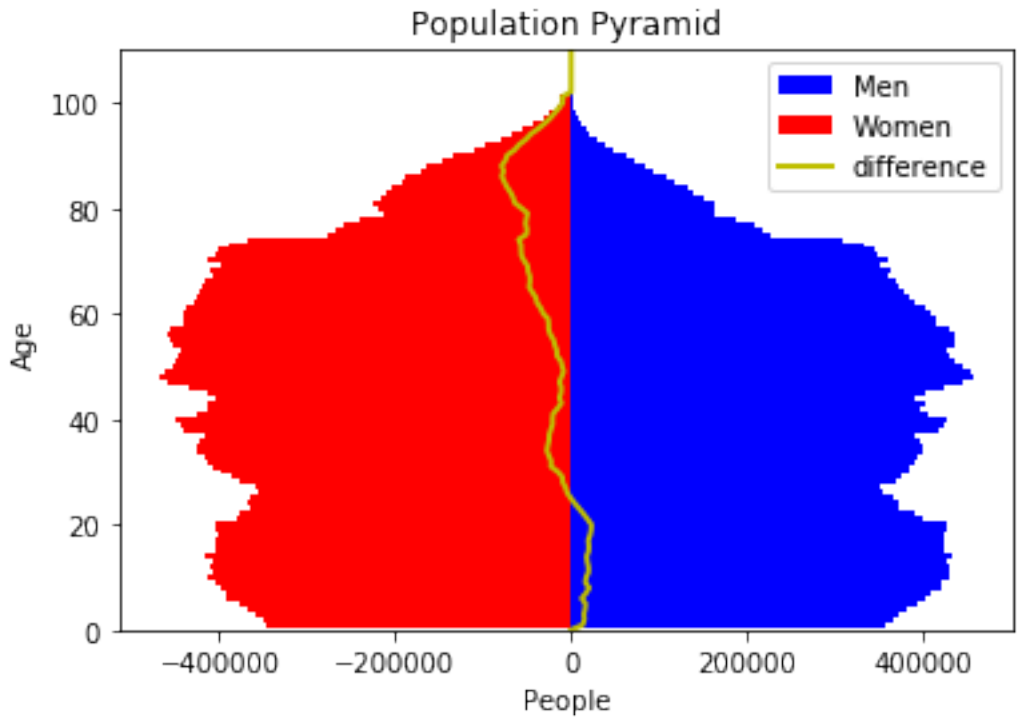
[14]:
```
array([[     0.        ,      0.        ],
       [358297.31638   , 344994.11584   ],
       [365516.36791912, 350386.88814046],
       [371734.07266293, 357228.65195867],
       [382450.37346902, 366544.40263353]])
```

[15]:
```
pop[:5]
```

[15]:
```
array([[360058., 346324.],
       [365656., 350503.],
```

```
       [371835., 357304.],
       [382535., 366607.],
       [393693., 377204.]])
```

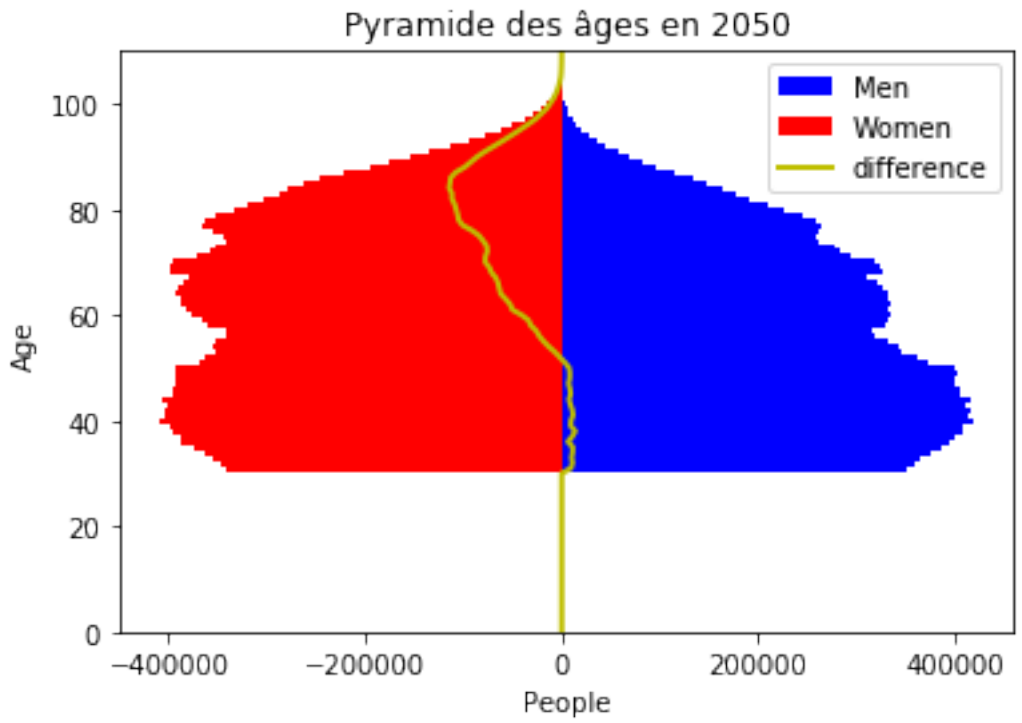
[16]:
```
from actuariat_python.plots import plot_population_pyramid
plot_population_pyramid(pop_next[:, 0], pop_next[:, 1]);
```



1.0.4 Exercice 4 : simulation jusqu'en 2100

Il s'agit de répéter l'itération effectuée lors de l'exercice précédent. Le plus est de recopier le code dans une fonction et de l'appeler un grand nombre de fois.

[17]:
```
def iteration(pop, mortalite):
    pop_next = pop * (1-mortalite)
    pop_next = numpy.vstack([numpy.zeros((1, 2)),
                             pop_next[:-1]]) # aucune naissance
    return pop_next

popt = pop
for year in range(2020, 2051):
    popt = iteration(popt, mortalite)

plot_population_pyramid(popt[:,0], popt[:,1], title="Pyramide des âges en 2050");
```



1.0.5 Exercice 5 : simulation avec les naissances

Dans l'exercice précédent, la seconde ligne de la fonction *iteration* correspond à cas où il n'y a pas de naissance. On veut remplacer cette ligne par quelque chose proche de la réalité :

- les naissances sont calculées à partir de la population féminines et de la table de fécondité
- on garde la même proportion homme/femme que celle actuellement observée

[18]:
```
ratio = pop[0, 0] / (pop[0, 1] + pop[0, 0])
ratio
```

[18]:
```
0.5097213688910532
```

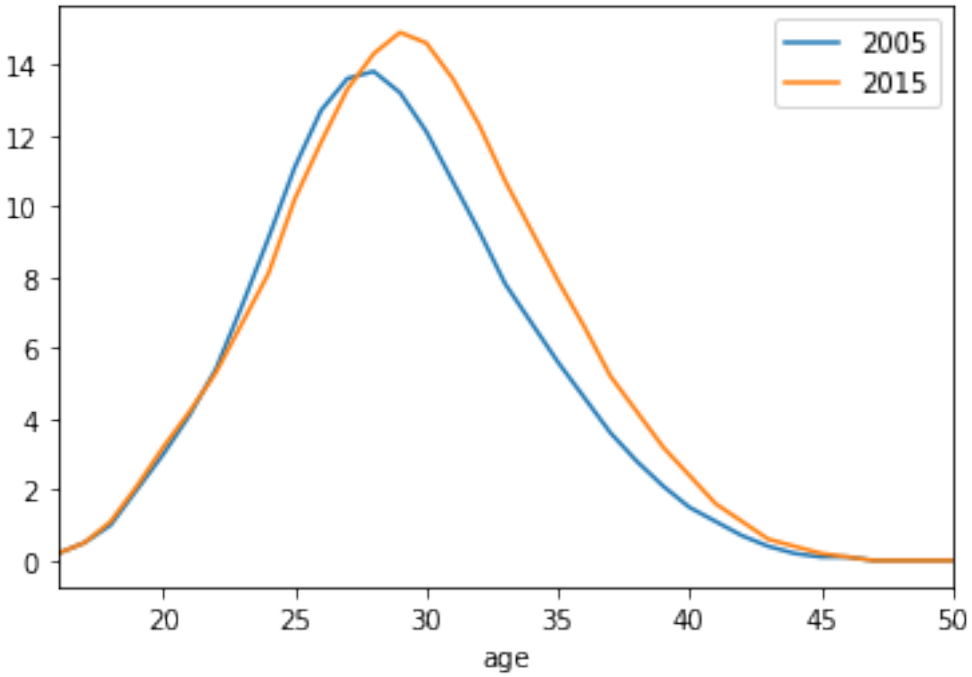
Il y a un peu plus de garçons qui naissent chaque année.

[19]:
```
from actuariat_python.data import fecondite_france
df = fecondite_france()
df.head()
```

[19]:

	age	2005	2015
4	16.0	0.2	0.2
5	17.0	0.5	0.5
6	18.0	1.0	1.1
7	19.0	2.0	2.1
8	20.0	3.0	3.2

[20]:
```
from matplotlib import pyplot as plt
df.plot(x="age", y=["2005", "2015"]);
```



On convertit ces données en une matrice numpy sur 120 lignes comme les précédentes. On se sert des méthodes fillna et merge.

[21]:
```
ages = pandas.DataFrame(dict(age=range(0,120)))
merge = ages.merge(df, left_on="age", right_on="age", how="outer")
fecondite = merge.fillna(0.0)
fecondite[13:17]
```

[21]:

	age	2005	2015
13	13	0.0	0.0
14	14	0.0	0.0
15	15	0.0	0.0
16	16	0.2	0.2

[22]:
```
mat_fec = fecondite[["2015"]].values / 100  # les chiffres sont pour 100 femmes
mat_fec.shape
```

[22]:
```
(120, 1)
```

[23]:
```
mat_fec.sum()
```

[23]:
```
1.899
```

Si la matrice `pop` a plus de ligne que la matrice `mat_fec`, on doit compléter la seconde avec autant de lignes nulles que la précédente.

[24]:
```
if mat_fec.shape[0] < pop.shape[0]:
    zeros = numpy.zeros((pop.shape[0] - mat_fec.shape[0], mat_fec.shape[1]))
    mat_fec = numpy.vstack([mat_fec, zeros])
mat_fec.sum()
```

[24]:
```
1.899
```

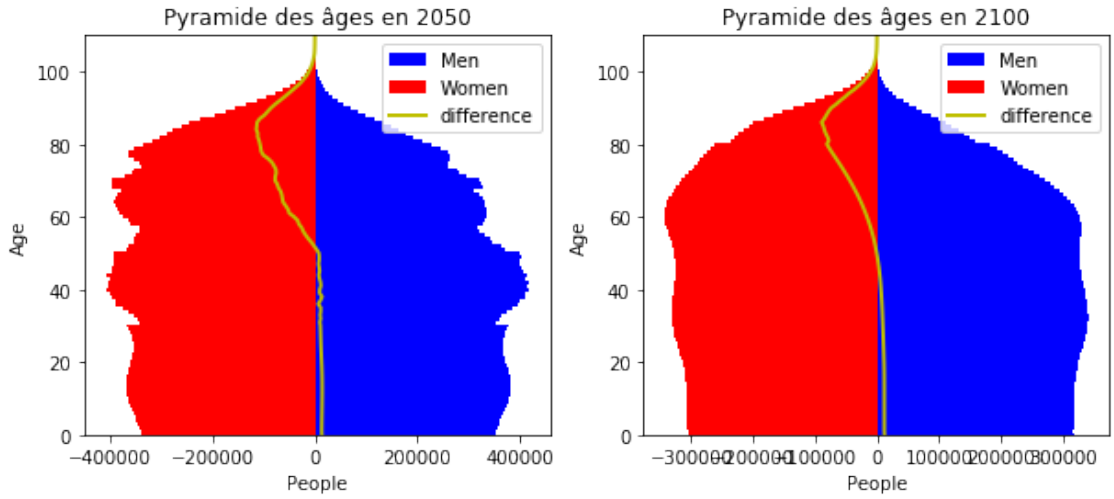
Il faut maintenant coder une fonction qui calcule le naissances pour l'année suivantes.

[25]:
```
def naissances(pop, fec):
    # on suppose que pop est une matrice avec deux colonnes homme, femme
    # et que fec est une matrice avec une colonne fécondité
    n = pop[:, 1] * fec[:, 0]
    return n.sum()

nais = naissances(pop, mat_fec)
nais
```

[25]:
```
756839.2760000001
```

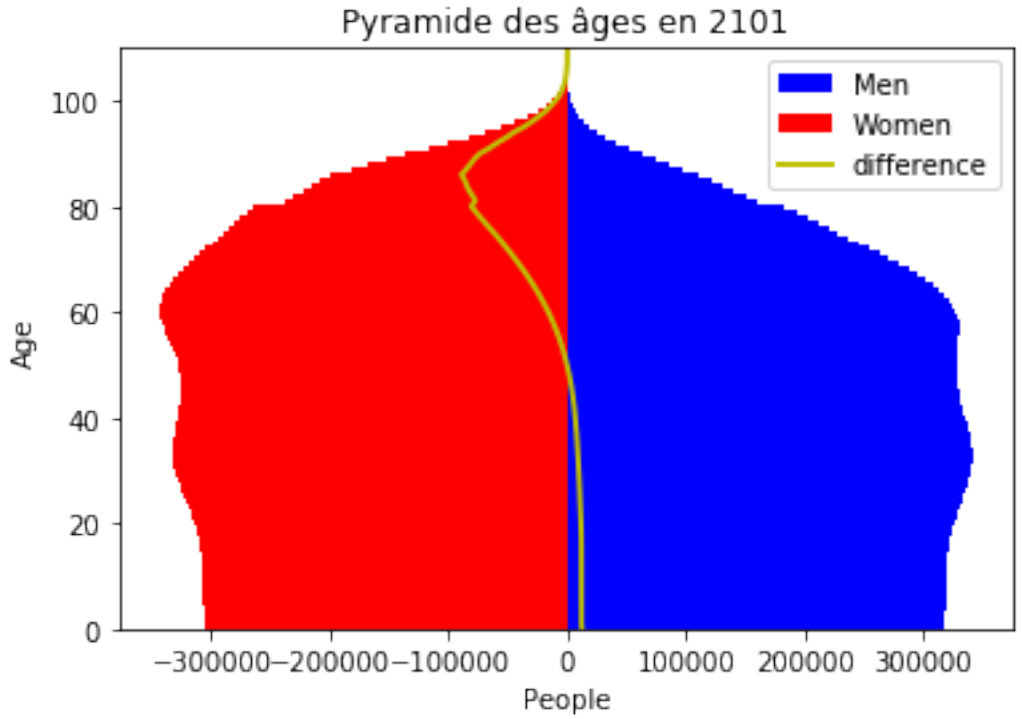
Et on reprend la fonction *iteration* et le code de l'exercice précédent :

[26]:
```
def iteration(pop, mortalite, fec, ratio):
    pop_next = pop * (1 - mortalite)
    nais = naissances(pop, fec)
    row = numpy.array([[nais * ratio, nais * (1 - ratio)]])
    pop_next = numpy.vstack([row, pop_next[:-1]]) # aucune naissance
    return pop_next

popt = pop
for year in range(2020, 2101):
    popt = iteration(popt, m, mat_fec, ratio)
    if year == 2050:
        popt2050 = popt.copy()
    if year == 2100:
        popt2100 = popt.copy()

fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 4))
plot_population_pyramid(popt2050[:, 0], popt2050[:, 1], ax=ax[0],
                        title="Pyramide des âges en 2050")
plot_population_pyramid(popt2100[:, 0], popt2100[:, 1], ax=ax[1],
                        title="Pyramide des âges en 2100");
```

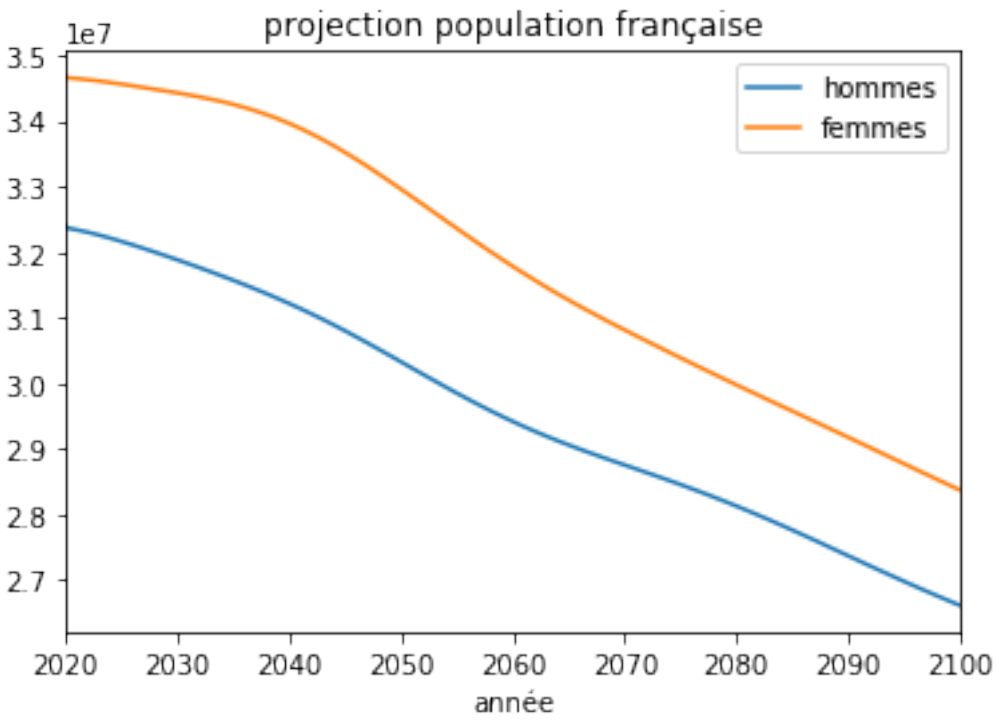


On va plus loin et on stocke la population dans un vecteur :

[27]:
```
total = [[2020, pop[:,0].sum(),pop[:,1].sum()]]
popt = pop
for year in range(2020, 2101):
    popt = iteration(popt, m, mat_fec, ratio)
    total.append([year, popt[:,0].sum(),popt[:,1].sum()])

plot_population_pyramid(popt[:, 0], popt[:, 1], title="Pyramide des âges en 2101");
```

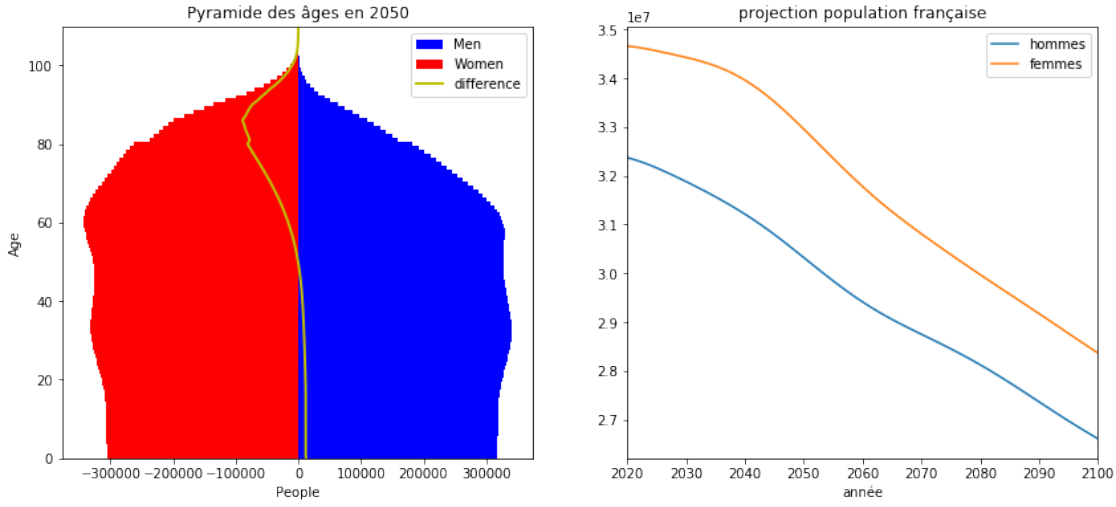


[28]:
```
df = pandas.DataFrame(data=total, columns=["année","hommes","femmes"])
df.plot(x="année", y=["hommes", "femmes"], title="projection population française");
```



Le code suivant permet de combiner les deux graphes sur la même ligne avec la fonction subplots :

[29]:
```
from matplotlib import pyplot as plt
fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(14,6))
plot_population_pyramid(popt[:,0], popt[:,1], title="Pyramide des âges en 2050",␣
↪ax=ax[0])
df.plot(x="année", y=["hommes", "femmes"], title="projection population française",␣
↪ax=ax[1]);
```



1.1 Retraites

La réforme de la retraite en 2019 laissera un souvenir indélébile. Une des mesures far est celle de l'âge pivot. Le modèle développé jusqu'à présent ne permet pas de simuler ce que chaque français pourrait obtenir avec la nouvelle réforme mais il permet de donner un ordre de grandeur sur le nombre de retraités selon que l'âge pivot est de 62 ans ou plus vieux. Si on en croit cette page 1,7 actif cotisant par retraité, il y a 1,7 cotisant par retraité.

Trois populations sont considérées : les jeunes de moins de 21 ans, à la charge de leurs aînés, les actifs, les retraités dont le nombre dépend de l'âge pivot. on veut donc calculer l'évolution de ces trois populations.

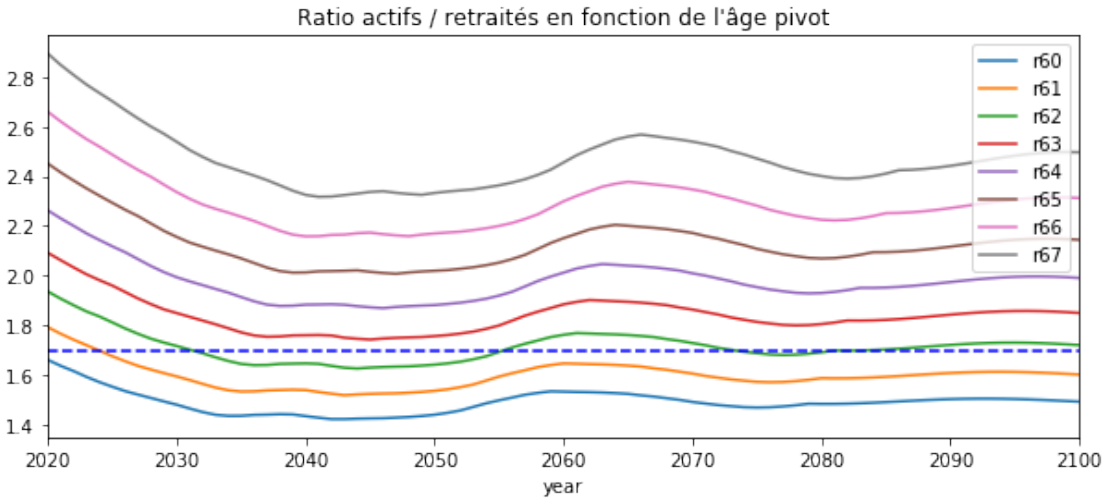
[30]:
```
from tqdm import tqdm

evol = []
popt = pop0.copy()
age_etude = 23
pivot = list(range(60, 68))
for year in tqdm(range(2020, 2101)):
    popt = iteration(popt, m, mat_fec, ratio)
    jeune = popt[:age_etude + 1].sum()
    row = dict(year=year)
    for p in pivot:
        actif = popt[age_etude + 1:p].sum()
        retraite = popt[p:].sum()
        rt = actif / retraite
        row['r%d' % p] = rt
    evol.append(row)

df_evol = pandas.DataFrame(evol)
df_evol.head()
```

```
100%|¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿␣
↪¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿
¿ ¿ ¿ ¿ ¿ | 81/81 [00:00<00:00, 6769.86it/s]
```

[30]:

	year	r60	r61	r62	r63	r64	r65	r66	r67
0	2020	1.661675	1.792986	1.936632	2.092034	2.262744	2.450994	2.659420	2.893034
1	2021	1.637597	1.766554	1.907657	2.062432	2.230352	2.415367	2.620045	2.847438
2	2022	1.616615	1.742623	1.881228	2.033293	2.200564	2.382585	2.583765	2.807077
3	2023	1.593194	1.720874	1.856290	2.005630	2.169929	2.351192	2.549055	2.768466
4	2024	1.572343	1.698854	1.836163	1.982169	2.143622	2.321765	2.518906	2.734809

[31]:
```
ax = df_evol.plot(x="year", y=["r%d" % p for p in pivot], figsize=(10, 4))
years = df_evol.year
ax.plot(years, [1.7 for _ in years], 'b--')
ax.set_title("Ratio actifs / retraités en fonction de l'âge pivot");
```



D'après ces simulations, il faudrait reculer l'âge de la retraite de deux ou trois ans pour garder le même ratio entre actifs et retraités tel qu'il est aujourd'hui.

[32] :