timeseries_ssa

January 21, 2022

1 Single Spectrum Analysis (SSA)

Illustration de la méthode SSA pour les séries temporelles appliquée à la détection de points aberrants. La méthode est décrite dans Singular Spectrum Analysis: Methodology and Comparison. Voir aussi Automated outlier detection in Singular Spectrum Analysis.

[1]:
```
from jyquickhelper import add_notebook_menu
add_notebook_menu()
```

[1]:
```
<IPython.core.display.HTML object>
```

[2]:
```
%matplotlib inline
```

1.1 Une série articielle

On introduit quelques points aberrants, pour le reste, elle suit le modèle $y_t = \frac{9}{10} y_{t-2} + \epsilon_t + a_t$ où a_t est le bruit aberrant qui survient quelques fois.

[3]:
```
import numpy.random as rnd
import numpy
N = 2000
bruit1 = rnd.normal(size=(N,))
temps = numpy.arange(N)
bruit1[:5], temps[:5]
```

[3]:
```
(array([-0.42127366, -0.80614375,  1.87947411,  0.13890672,  0.55054172]),
 array([0, 1, 2, 3, 4]))
```

On crée un bruit aberrant.

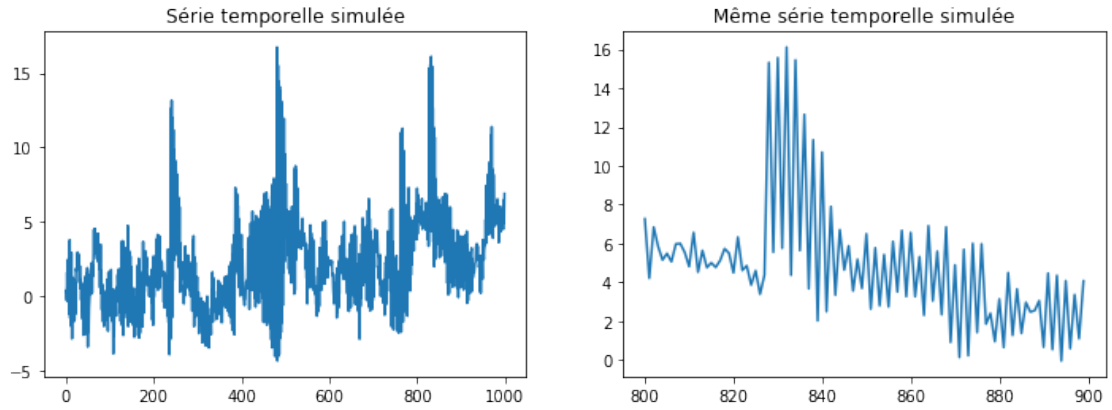
[4]:
```
import random
bruit2 = numpy.zeros((N,))
for i in range(0, 10):
    h = random.randint(0, N-1)
    bruit2[h] = rnd.normal() + 10
```

[5]:
```
serie = []
y = 10
for i in range(N//2+100):
    serie.append(y + bruit1[i] + 0.0004 * temps[i] + bruit2[i])
    if i > 30:
        y = 0.9 * serie[-2]
Y = numpy.array(serie[-1000:])
```

```
Y[:5]
```

[5]:
```
array([ 0.35328897,  0.43350731, -0.25385586,  1.62514162,  0.09987641])
```

[6]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 4))
ax[0].plot(numpy.arange(len(Y)), Y)
ax[1].plot(numpy.arange(800, 900), Y[800:900])
ax[0].set_title("Série temporelle simulée")
ax[1].set_title("Même série temporelle simulée");
```



1.2 Autocorrélations

L'autocorrélogramme est définie par la série $cor(Y_t, Y_{t-d})_d$. On le calcule sur la série nettoyée de sa tendance.

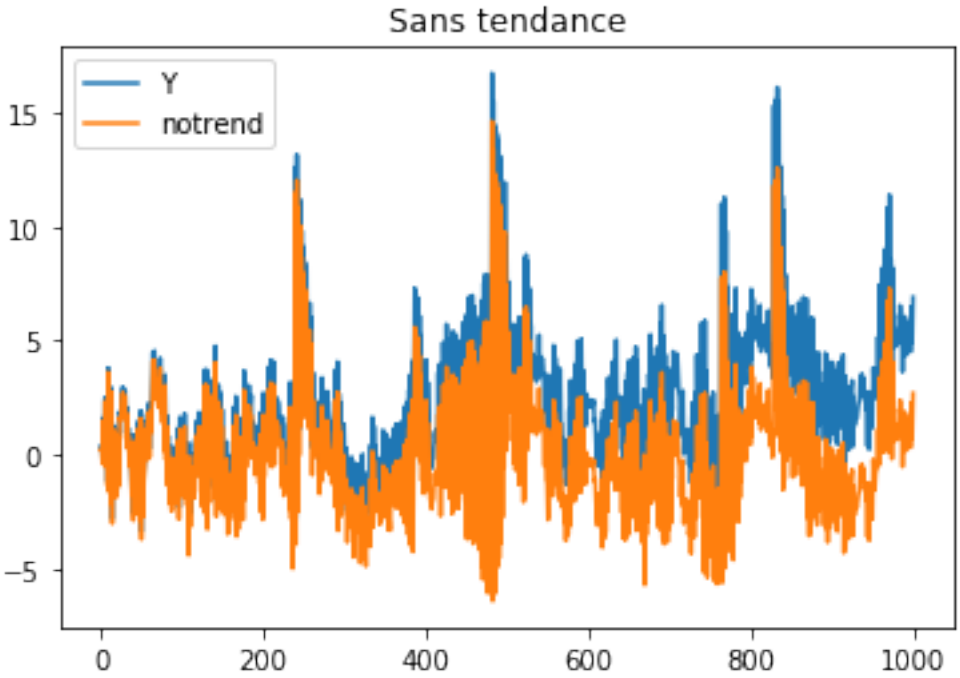
[7]:
```
from pandas import DataFrame
df = DataFrame(dict(Y=Y))
df.head()
```

[7]:
```
          Y
0  0.353289
1  0.433507
2 -0.253856
3  1.625142
4  0.099876
```

[8]:
```
from statsmodels.tsa.tsatools import detrend
df["notrend"] = detrend(df.Y)
df.head()
```

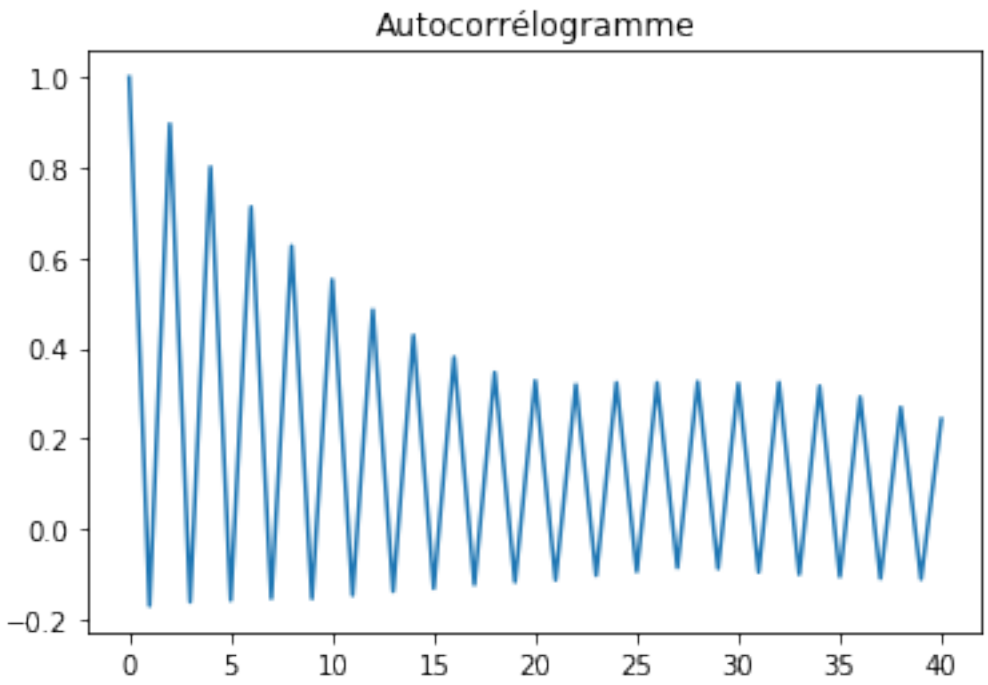
[8]:
```
          Y   notrend
0  0.353289  0.216265
1  0.433507  0.292403
2 -0.253856 -0.399040
3  1.625142  1.475877
4  0.099876 -0.053468
```

[9]:
```
ax = df.plot()
ax.set_title("Sans tendance");
```



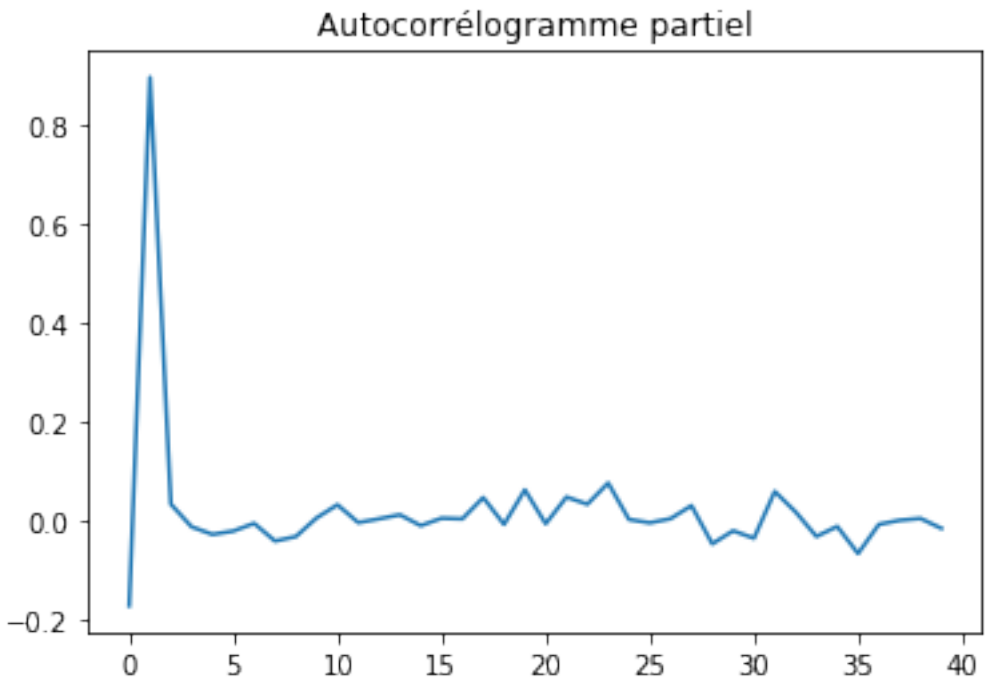
L'autocorrélogramme à proprement parler.

[10]:
```
from statsmodels.tsa.stattools import acf
cor = acf(df.notrend)
fig, ax = plt.subplots(1, 1)
ax.plot(cor)
ax.set_title("Autocorrélogramme");
```



Etant donnée que la série Y_t dépend de Y_{t-2}, on observe un pic pour $cor(Y_t, Y_{t-2})_d$ et pour tous les d pairs. $cor(Y_t, Y_{t-4}) \sim cor(Y_t, Y_{t-2})^2$. On enlève ces effets récursifs en calculant l'autocorrélogramme partiel qui correspond à l'estimation des coefficients d'un modèle autorégressif infini.

[11]:
```
from statsmodels.tsa.stattools import pacf
pcor = pacf(df.notrend)
fig, ax = plt.subplots(1, 1)
ax.plot(pcor[1:])
ax.set_title("Autocorrélogramme partiel");
```



1.3 SSA

Ou Singular Spectrum Analysis. La méthode part de la matrice des séries décalées qu'on décompose avec la méthode SVD ou Singular Value Decomposition.

[12]:
```
def lagged_ts(serie, lag):
    dim = serie.shape[0]
    res = numpy.zeros((dim - lag + 1, lag))
    for i in range(lag):
        res[:, i] = serie[i:dim-lag+i+1]
    return res

lagged_ts(Y, 3)
```

[12]:
```
array([[ 0.35328897,  0.43350731, -0.25385586],
       [ 0.43350731, -0.25385586,  1.62514162],
       [-0.25385586,  1.62514162,  0.09987641],
       …,
       [ 5.59900199,  4.51154279,  6.48711916],
       [ 4.51154279,  6.48711916,  4.94491822],
       [ 6.48711916,  4.94491822,  6.90403987]])
```

[13]:
```
lag = lagged_ts(Y, 60)
lag.shape
```

[13]:
```
(941, 60)
```

[14]:
```
from numpy.linalg import svd
# u @ numpy.diag(s) @ vh
u, s, vh = svd(lag)
```

[15]:
```
u.shape, s.shape, vh.shape
```

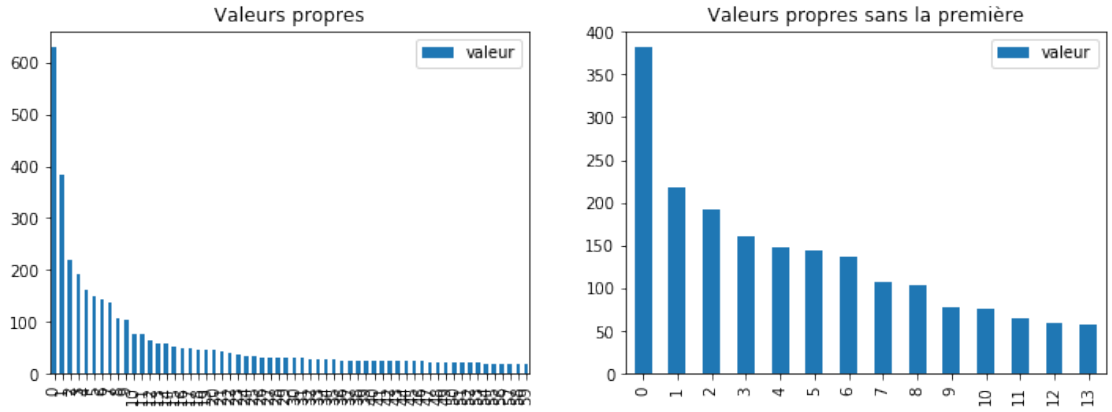
[15]:
```
((941, 941), (60,), (60, 60))
```

[16]:
```
d = numpy.zeros((941, 60))
d[:60,:60] = numpy.diag(s)
```

[17]:
```
(u @ d @ vh).shape
```

[17]:
```
(941, 60)
```

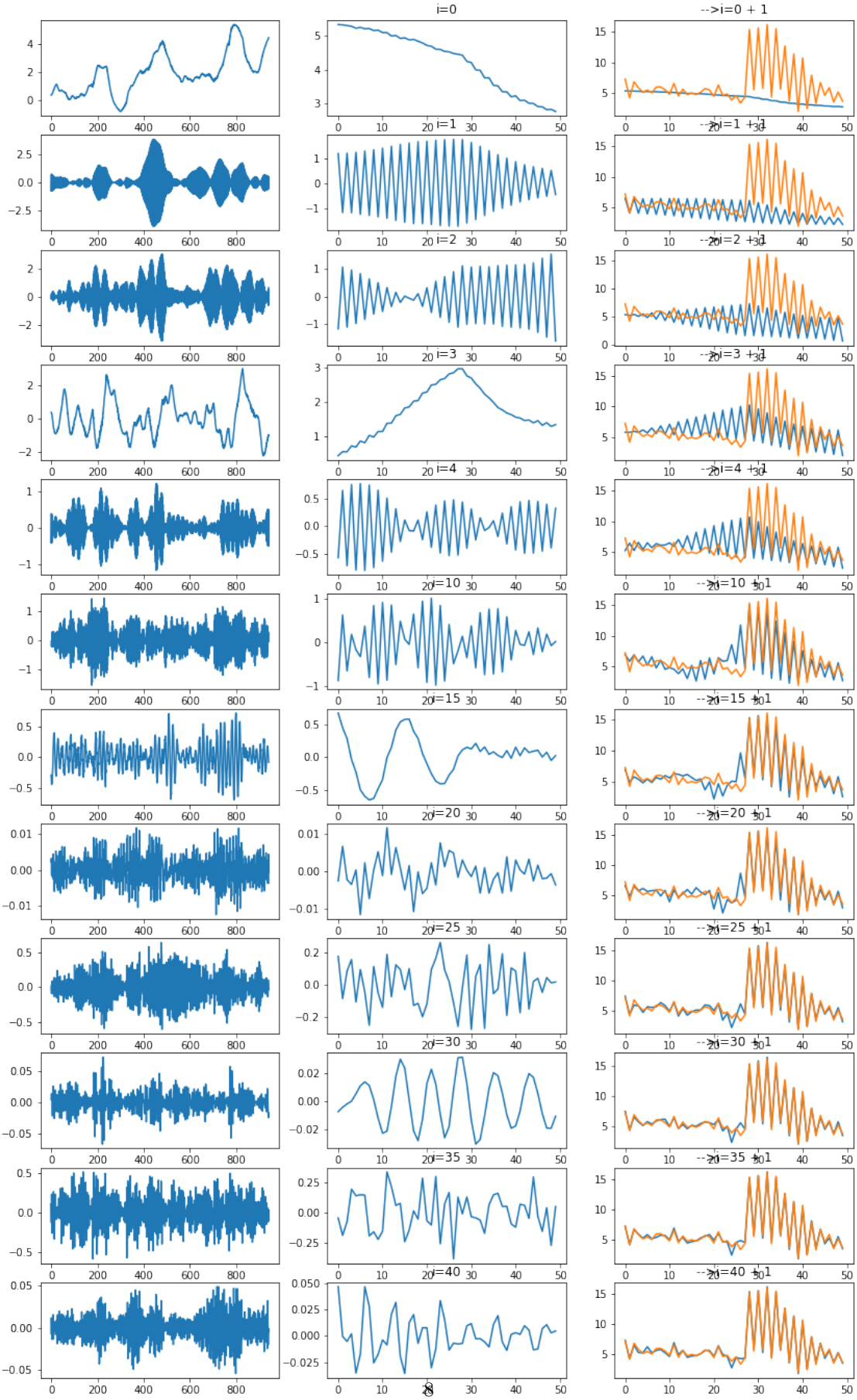
[18]:
```
fig, ax = plt.subplots(1,2, figsize=(12,4))
DataFrame(dict(valeur=s)).plot(kind="bar", ax=ax[0])
DataFrame(dict(valeur=s[1:15])).plot(kind="bar", ax=ax[1])
ax[0].set_title("Valeurs propres")
ax[1].set_title("Valeurs propres sans la première");
```



Je me représente la méthode SVD comme une façon de projeter des vecteurs sur l'espace vectoriel constitué des premiers vecteurs propres, à chaque dimension supplémentaire, c'est comme une pièce du puzzle qui s'assemble jusqu'à recomposer l'ensemble. Ce qu'on peut voir aussi comme ceci :

[19]:
```
np = 12
fig, ax = plt.subplots(np, 3, figsize=(14, np*2))
for n in range(np):
    i = n if n < 5 else n * 5 - 15
    d = numpy.zeros((941, 60))
    d[i, i] = s[i]
    X2 = u @ d @ vh
    pos = 0 #X2.shape[1] - 1

    # série reconstruites avec un axe
    ax[n, 0].plot(X2[:,pos])
    ax[n, 1].set_title("i=%d" % i)
```

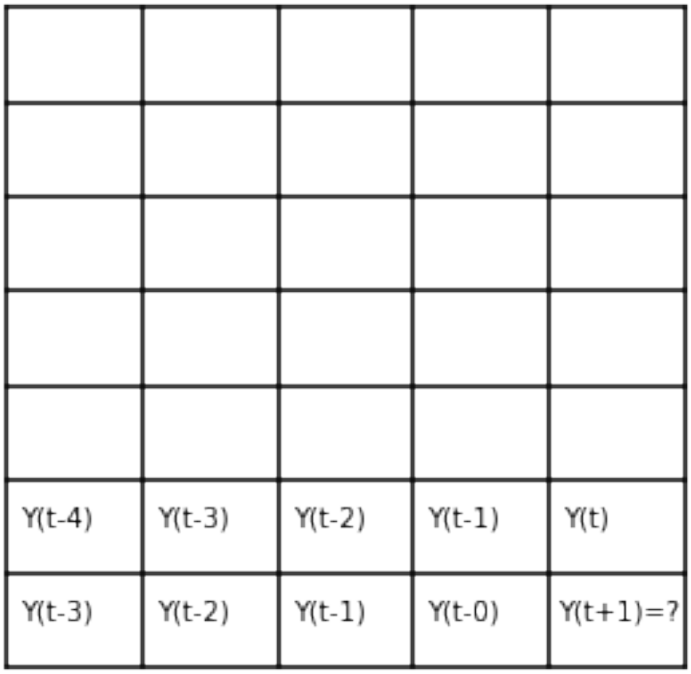
```
    # série reconstruites avec un axe
    ax[n, 1].plot(X2[800:850,pos])
    ax[n, 1].set_title("i=%d" % i)

    d = numpy.zeros((941, 60))
    d[:i+1, :i+1] = numpy.diag(s[:i+1])
    X2 = u @ d @ vh
    ax[n, 2].plot(X2[800:850,pos])
    ax[n, 2].plot(Y[800:850])
    ax[n, 2].set_title("-->i=%d + 1" % i)
```


i=0
-->i=0 + 1
i=1
-->i=1 +1
i=2
-->i=2 +1
i=3
-->i=3 +1
i=4
-->i=4 +1
i=10
-->i=10 +1
i=15
-->i=15 +1
i=20
-->i=20 +1
i=25
-->i=25 +1
i=30
-->i=30 +1
i=35
-->i=35 +1
i=40
-->i=40 +1

1.4 La prédiction

On veut prédire Y_{t+1}. L'idée consiste à appliquer la méthode en considérent Y_{t+1} égale à Y_t puis à remplacer cette prédiction par la valeur de la série reconstruite. On peut même prédire à un horizon plus grand que la valeur suivante.

[20]:
```
fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(5,5))
for i in range(0, 8):
    ax.plot([0, 5], [i, i], 'k-')
    if i < 6:
        ax.plot([i, i], [0, 7], 'k-')
    if i < 4:
        ax.text(i + 0.1, 1.5, "Y(t-%d)" % (4-i))
        ax.text(i + 0.1, 0.5, "Y(t-%d)" % (3-i))
ax.text(4.1, 1.5, "Y(t)")
ax.text(4.05, 0.5, "Y(t+1)=?")
plt.axis('off');
```



1.5 Les points aberrants

On repère les points aberrants avec l'une méthode de son choix sur la série reconstruite.

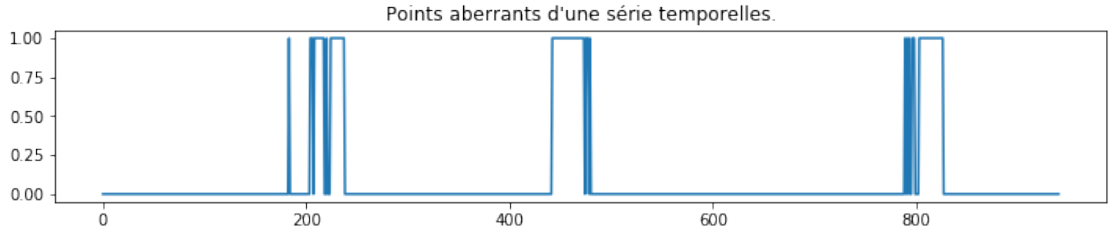
[21]:
```
d = numpy.zeros((941, 60))
for i in range(0, 30):
    d[i, i] = s[i]
X2 = u @ d @ vh
```

[22]:
```
from sklearn.covariance import EllipticEnvelope
env = EllipticEnvelope(support_fraction=0.9)
env.fit(X2[:,:30])
```

[22]:
```
EllipticEnvelope(assume_centered=False, contamination=0.1, random_state=None,
         store_precision=True, support_fraction=0.9)
```

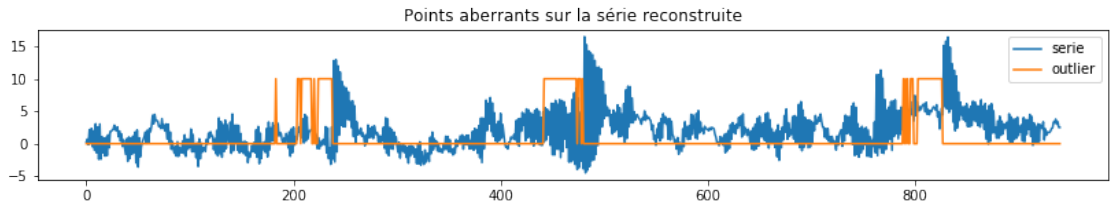
L'idéal serait d'utiliser une méthode basée sur une ACP. Le plus proche reste le modèle gaussien avec EllipticEnvelope.

[23]:
```
out = env.predict(X2[:,:30])

fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(12,2))
ax.plot((1 - out)/2, "-")
ax.set_title("Points aberrants d'une série temporelles.");
```



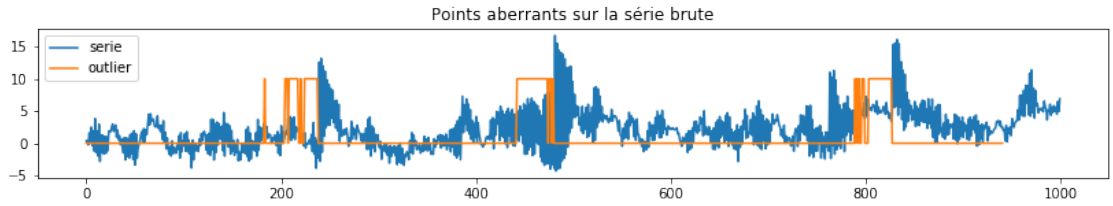
On observe des plages contiguës. Cela signifie que d'une valeur aberrante contamine des vecteurs décalées consécutifs de la série Y. Il ne reste plus qu'à repérer la valeur incriminée.

[24]:
```
fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(14,2))
ax.plot(X2[:,0], label="serie")
ax.plot((1 - out)*5, "-", label="outlier")
ax.set_title("Points aberrants sur la série reconstruite")
ax.legend();
```



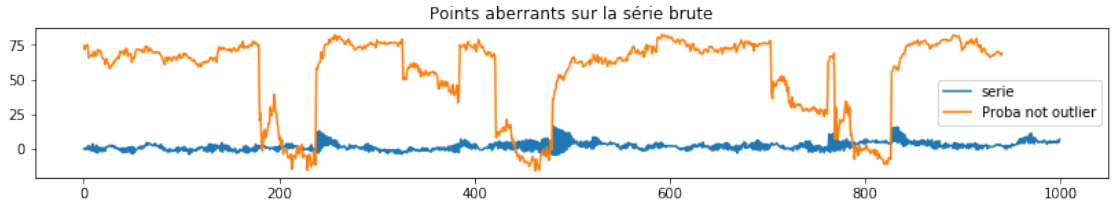
[25]:
```
fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(14,2))
ax.plot(Y, label="serie")
ax.plot((1 - out)*5, "-", label="outlier")
```

```
ax.set_title("Points aberrants sur la série brute")
ax.legend();
```



Ce qui a l'air de correspondre à la fin des grandes plages. On recommence avec la probabilité d'être un outlier.

[26]:
```
fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(14,2))
outp = env.decision_function(X2[:,:30])
ax.plot(Y, label="serie")
ax.plot(outp, "-", label="Proba not outlier")
ax.set_title("Points aberrants sur la série brute")
ax.legend();
```



[27]:
```

```