colle du mercredi 3 décembre 2003

La définition suivante d'une droite était celle qui figurait dans le milieu des années soixante-dix dans la circulaire ministérielle n° 71370 de l'Education Nationale, elle était censée faire partie du programme de mathématique des classes de troisième[1].

On appelle droite un ensemble D d'éléments dits points, muni d'une bijection g de D dans $\mathbb{R}$, et de toutes celles f qui s'en déduisent de la manière suivante : a étant un nombre réel arbitraire, on a soit $f(M) = g(M) + a$, soit $f(M) = -g(M) + a$. La famille des bijections f s'appelle une structure euclidienne. Si M et M' sont deux points de D, le nombre positif $d(M,M') = |f(M') - f(M)|$ ne dépend pas du choix de f, et par suite, ne dépend que de la structure euclidienne de D : $d(M,M')$ est la distance des deux points M et M'. (1)

Afin de décortiquer cette définition, on se propose tout d'abord de montrer que :

Si D est une droite du plan $\mathbb{R}^2$, alors il existe une fonction f telle que pour tout couple de points (M,M') de D, on ait $|f(M) - f(M')| = d(M,M')$ où $d(M,M')$ est la distance euclidienne entre les points M et M'. (2)

La fonction f permet en fait d'associer une abscisse réelle à un point M de la droite D. On choisit donc une origine O n'importe où sur la droite et on définit la fonction $f(M)$ pour $M \in D$ comme étant la valeur algébrique $\overline{OM}$. Par conséquent :

$$f(M) = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u} \tag{3}$$

où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur unitaire de D.

Il suffit de vérifier que $|f(M) - f(M')| = d(M,M')$. Soient $M,M' \in D$:

$$\begin{aligned}
f(M) - f(M') &= \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}\right) \cdot \overrightarrow{u} \\
&= \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{M'O}\right) \cdot \overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{OM}\right) \cdot \overrightarrow{u} \\
&= \overrightarrow{M'M} \cdot \overrightarrow{u} = \overline{M'M}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $|f(M) - f(M')| = M'M = d(M,M')$. Ce raisonnement est valable quelques soient les points M et M', par conséquent, l'assertion (2) est vérifiée. L'ensemble des fonctions f qu'il est possible de construire de cette manière dépend du choix de l'origine O sur la droite et du sens du vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Ceci permet d'expliquer la première partie de la définition (1) :

1. Cette définition est tirée du livre "Faut-il avoir peur des maths?" de Benoît Rittaud, collection "Les Petites Pommes du Savoir", éditions Le Pommier. Elle avait cours dans les années soixante-dix, époque triomphante des "mathématiques modernes". Laurent Schwartz écrivit à propos de cette époque : "Les ravages causés par l'introduction desdites mathématiques modernes furent une catastrophe internationale de grande envergure, mais plus particulièrement française. Une génération de jeunes Français a été sacrifiée du point de vue de l'apprentissage des mathématiques qui en sont sorties passablement discréditées dans l'opinion publique."

On appelle droite un ensemble D d'éléments dits points, muni d'une bijection g de D dans $\mathbb{R}$, et de toutes celles f qui s'en déduisent de la manière suivante : a étant un nombre réel arbitraire, on a soit $f(M) = g(M) + a$, soit $f(M) = g(M) - a$.

En effet, si g est la fonction $g(M) = \overrightarrow{O'M} \cdot \overrightarrow{u'}$, alors si $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{u}$, on trouve que $g(M) = \overrightarrow{O'M} \cdot \overrightarrow{u} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) \cdot \overrightarrow{u} = \overline{O'O} + f(M)$. Le nombre a cherché est donc $a = \overline{O'O}$. On procéde de même lorsque $\overrightarrow{u'} = -\overrightarrow{u}$, on trouve alors $f(M) = -g(M) - \overline{O'O}$. Il suffit alors de montrer que f est une bijection [2], de la droite D vers $\mathbb{R}$. On définit alors la fonction $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par :

$$\text{si } x \in \mathbb{R} \text{ alors } f^{-1}(x) = O + x\overrightarrow{u} \tag{4}$$

On vérifie que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f(O + x\overrightarrow{u}) = x\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = x \\ &\text{car } \overrightarrow{u} \text{ est unitiaire} : \|\overrightarrow{u}\| = 1. \end{aligned}$$

Et pour $M \in D$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(M)) &= f^{-1}(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u}) = O + \left(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u}\right) \overrightarrow{u} \\ &= O + \overline{OM}\ \overrightarrow{u} = M \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application f est une bijection et elle vérifie :

$$\forall\, (M,M') \in D^2,\ |f(M) - f(M')| = d(M,M')$$

Il n'est pas facile de construire une réciproque à cette assertions mais on propose :

Soit O un point du plan $\mathbb{R}^2$, soit une fonction à valeurs réelles $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'ensemble D des points du plan vérifiant : $D = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } |f(M) - f(O)| = d(O,M)\right\}$. On suppose également que quelques soient $(M,M') \in D^2$, ces deux points vérifient $|f(M) - f(M')| = d(M',M)$. Alors l'ensemble D est une droite. (5)

Avant de démontrer cette assertion, on se propose de démontrer :

Soient A,B deux points du plan alors :

$$\forall M \in \mathbb{R}^2,\ M \in [AB] \Longleftrightarrow d(M,A) + d(M,B) = d(A,B) \tag{6}$$

2. $f : E \longrightarrow F$ est une bijection s'il existe une fonction notée g telle que $\forall x \in E$, $g(f(x)) = x$ et $\forall y \in F$, $f(g(y)) = y$.

Tout d'abord $d(M,A) + d(M,B) = d(A,B) \Longleftrightarrow AM + BM = AB$. De plus :

$$\begin{aligned} AB^2 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) \\ AB^2 &= AM^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + BM^2 \end{aligned}$$

Les hypothèses impliquent que : $AB^2 = (AM + BM)^2 = AM^2 + BM^2 + 2AM\,BM$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} & AM^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + BM^2 = AM^2 + BM^2 + 2AM\,BM \\ \Longleftrightarrow\ & \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = AM\,BM \\ \Longleftrightarrow\ & AM\,BM \cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}\right) = AM\,BM \\ \Longleftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{l} A = M \text{ ou } B = M \\ \cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}\right) = 1 \Longleftrightarrow \widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}} = 0 \Longleftrightarrow \widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}} = \pi \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, M appartient au segment $[AB]$.

On se propose de démontrer maintenant (voir figure 1) :

Soient A,B deux points du plan alors :

$$\begin{gathered} \forall M \in \mathbb{R}^2,\ M \in (AB)\,,\ M \notin [AB] \Longleftrightarrow \\ d(M,A) + d(M,B) = d(A,B) + 2\min\{d(M,A),d(M,B)\} \end{gathered} \tag{7}$$

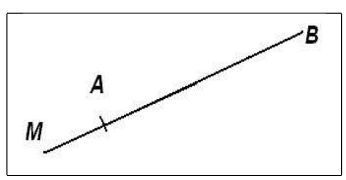

FIG. 1 – *Pour cet exemple où $MA < MB$, on a $MB - MA = AB$.*

$d(M,A) + d(M,B) = d(A,B) + 2\min\{d(M,A),d(M,B)\}$ signifie qu'on se trouve dans un des deux cas suivants :

$$\begin{array}{ll} d(A,B) = d(M,B) - d(M,A) & M \text{ est sur la droite du côté de } A \\ d(A,B) = d(M,A) - d(M,B) & M \text{ est sur la droite du côté de } B \end{array}$$

On suppose tout d'abord que $MA < MB$, par conséquent : $AB = MB - MA$. On applique le même raisonnement que précédemment :

$$
\begin{aligned}
& AB^2 = AM^2 + 2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB} + BM^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM\,BM \\
\Longleftrightarrow\ & \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB} = -AM\,BM \\
\Longleftrightarrow\ & AM\,BM\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}\right) = -AM\,BM \\
\Longleftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} A = M \text{ ou } B = M \\ \cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}\right) = -1 \Longleftrightarrow \widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB}} = \pi \Longleftrightarrow \widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}} = 0 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

L'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$ est nul, les points A,M,B sont donc alignés, de plus M ne peut être sur le segment $[AB]$. On aboutit exactement au même résultat si $MA > MB$. L'assertion (7) est donc démontrée.

On revient maintenant à la démonstration de la réciproque (5). Il faut donc démontrer que l'ensemble $D = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } |f(M) - f(O)| = d(O,M)\right\}$ vérifiant $\forall\,(M,M') \in D^2, |f(M) - f(M') = d(M,M')|$, est une droite. Pour ce faire, on propose de considérer deux points O et P appartenant à D et de démontrer que quelque soit M un point de D, les points O,P,M sont alignés. D'après les assertions (6) et (7), démontrer que O,P,M sont alignés est équivalent à montrer que :

$$
\left\{\begin{array}{l} \text{soit } MO + MP = OP \\ \text{soit } MO + MP = OP + 2\min\{MO,MP\} \end{array}\right.
$$

Comme le point M appartient à D, on peut donc écrire les égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
|f(M) - f(O)| &= d(O,M) = OM \\
|f(P) - f(O)| &= d(O,P) = OP \\
|f(M) - f(P)| &= d(M,P) = MP
\end{aligned}
$$

On en déduit que :

$$
\begin{aligned}
OM + MP &= |f(M) - f(O)| + |f(M) - f(P)| \\
&= \left\{\begin{array}{l} |f(M) - f(O) + f(M) - f(P)| \\ \quad \text{si } f(M) - f(O) \text{ et } f(M) - f(P) \text{ sont de même signe} \\ |f(M) - f(O) - f(M) + f(P)| \text{ sinon} \end{array}\right. \\
&= \left\{\begin{array}{l} |2f(M) - f(O) - f(P)| \\ \quad \text{si } f(M) - f(O) \text{ et } f(M) - f(P) \text{ sont de même signe} \\ |f(O) - f(P)| = OP \text{ sinon} \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Dans un cas, $OM + MP = OP$, il reste donc à démontrer que, lorsque $f(M) - f(O)$ et $f(M) - f(P)$ sont de même signe, on a :

$$
\begin{aligned}
|2f(M) - f(O) - f(P)| &= OP + 2\min\{MO,MP\} \\
&= |f(O) - f(P)| + 2\min\{|f(M) - f(O)|\,, |f(M) - f(P)|\}
\end{aligned}
$$

On suppose dans un premier temps que, $f(M) > f(O)$ et $f(M) > f(P)$, dans ce cas, il est possible de faire disparaître les valeurs absolues. Il faut donc démontrer que :

$$|2f(M)-f(O)-f(P)| = |f(O)-f(P)| + 2\min\{f(M)-f(O),f(M)-f(P)\}$$

On utilise pour cela le fait que pour deux nombres a et b: $\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$ (voir note de bas de page[3]). D'où :

$$\begin{aligned}
&|f(O)-f(P)| + 2\min\{f(M)-f(O),f(M)-f(P)\}\\
&= |f(O)-f(P)| + 2f(M)-f(O)-f(P)-|f(O)-f(P)|\\
&= 2f(M)-f(O)-f(P) = |2f(M)-f(O)-f(P)|
\end{aligned}$$

Si $f(M) < f(O)$ et $f(M) < f(P)$, alors :

$$\begin{aligned}
&|f(O)-f(P)| + 2\min\{|f(M)-f(O)|\,,|f(M)-f(P)|\}\\
&= |f(O)-f(P)| + 2\min\{f(O)-f(M),f(P)-f(M)\}\\
&= |f(O)-f(P)| + (f(O)+f(P)-2f(M)) - |f(O)-f(P)|\\
&= f(O)+f(P)-2f(M) = |2f(M)-f(O)-f(P)|
\end{aligned}$$

La réciproque (5) est donc démontrée.

Chutes

Autre démonstration de (6)

De manière évidente, si M appartient au segment $[AB]$ alors $d(M,A)+d(M,B) = d(A,B)$. Il reste à démonter la réciproque. Soit un point M vérifiant $d(M,A)+d(M,B) = d(A,B)$, il faut démontrer que $M \in [A,B]$. On construit le point H projection orthogonale du point M sur la droite (AB) (voir figure 2).

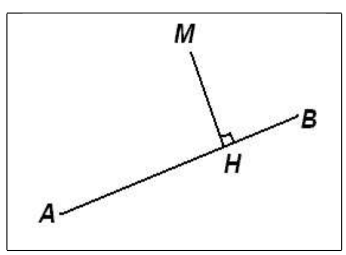

FIG. 2 – *H est la projection de M sur la droite (AB).*

On sait que :

3. En effet, si $a < b$, $2\min\{a,b\} = 2a = a+b+(a-b) = a+b-|a-b|$, dans le cas contraire, on montre que : si $a > b$, $2\min\{a,b\} = 2b = a+b-(a-b) = a+b-|a-b|$. On démontre de la même manière que $\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$.

$$
\begin{aligned}
AM^2 &= \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM} = \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right)\\
&= AH^2 + 2\underbrace{\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HM}}_{=0} + HM^2\\
&= AH^2 + HM^2
\end{aligned}
$$

De même, on démontre que : $BM^2 = BH^2 + HM^2$. Puisque $d(M,A) + d(M,B) = MA + MB$, Donc :

$$
(MA + MB)^2 = MA^2 + 2MA\,MB + MB^2
$$

Or, d'après les hypothèses définies en (6), $d(M,A) + d(M,B) = d(A,B) = AB = AH + BH$. On en déduit que :

$$
\begin{aligned}
& (MA+MB)^2 = MA^2 + 2MA\,MB + MB^2 = AB^2 = AH^2 + 2AH\,HB + HB^2\\
\Longleftrightarrow\ & MA^2 + 2MA\,MB + MB^2 = AH^2 + 2AH\,HB + HB^2\\
\Longleftrightarrow\ & AH^2 + HM^2 + 2MA\,MB + BH^2 + HM^2 = AH^2 + 2AH\,HB + HB^2\\
\Longleftrightarrow\ & HM^2 + MA\,MB = AH\,HB
\end{aligned}
$$

Comme $AH < MA$ et $BH < BM$, le seul point vérifiant cette égalité est H. Le point M appartient donc à la droite (AB). Il reste à vérifier que si H n'appartient pas au segment $[AB]$, $d(M,A) + d(M,B) > d(A,B)$. L'assertion (6) est donc démontrée.